

# MATRICES Y DETERMINANTES

## MATRICES

### Definición de matriz :

Se llama matriz de orden o dimensión  $m \times n$  a un conjunto de números distribuidos en  $m$  filas y  $n$  columnas , encerrados entre paréntesis de la forma :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se representa por  $A$  o  $(a_{ij})$

### Tipos de matrices :

- matriz fila
- matriz columna
- matriz nula
- matriz cuadrada ( los elementos donde  $i=j$  forman la diagonal principal )
- matriz diagonal ( debe se cuadrada ) : matriz unidad  $I$
- matriz simétrica (  $a_{ij}=a_{ji}$  )
- matriz antisimétrica (  $a_{ij}=-a_{ji}$  )
- matriz triangular : es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo o por encima de la diagonal principal son nulos .
- **matriz traspuesta  $A'$**  ( de otra  $B$  ) : es cuando verifican que  $a_{ij} = b_j$
- matriz opuesta  $A$  ( de otra  $B$  ) : es cuando verifican que  $a_{ij} = -b_j$

### Operaciones con matrices

1. Suma de matrices : se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar
2. Producto de un número real por una matriz : se obtiene multiplicando cada uno de los elementos por ese número .
3. Multiplicación de matrices : se obtiene multiplicando cada una de las filas de la 1ª matriz por cada una de las columnas de la otra . Ojo : no se cumple la propiedad conmutativa .

### Matriz inversa $A^{-1}$ :

Se dice que una matriz  $B$  es inversa de otra matriz  $A$  si se cumple que  $A \cdot B = I$  .

A la matriz  $B$  inversa de  $A$  se simboliza por  $A^{-1}$  .

Se puede calcular de 3 formas :

1. A partir de la definición
2. Por el método de reducción de Gauss
3. Por determinantes

Una matriz se dice que es **inversible o regular** si posee inversa . En caso contrario se dice que es **singular** .

## DETERMINANTES

### Introducción :

Sean los números 1,2,3,...,n. Con estos números se pueden formar n! permutaciones .

A la permutación 1,2,3,...,n se le llama permutación principal .

Si se cambian de su lugar natural se dice que tenemos una inversión . Por ejemplo :

2 3 1 4 5 6.... tiene dos inversiones (nº de pasos que hay que dar para obtener la permutación principal )

Una permutación se dice que es par(impar) si el nº total de inversiones es par (impar).

Se llama índice de una permutación al nº total de inversiones .

### Definición de determinante :

Sea una matriz cuadrada A n x n , se llama determinante de la matriz y se representa por /A/ a la suma de todos los productos de n factores que se pueden formar tales que cada producto tenga un elemento y solo uno de cada fila y cada columna anteponiendo el signo + o - dependiendo si la permutación de los subíndices de las filas y columnas son de la misma o de distinta clase . Por ejemplo :  $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$  tenemos :

1 2 3 .....par

2 3 1 .....par

Luego el signo es +

### Determinante de 2º y 3º orden :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Aunque este último se recuerda mejor por la regla de Sarrus

### Propiedades de los determinantes :

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta
2. Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas su determinante cambia de signo
3. Un determinante que tiene dos líneas paralelas iguales vale 0
4. Si un determinante tiene todos los elementos de una línea nulos , el determinante vale 0
5. Si se multiplica un determinante por un nº real queda multiplicado por dicho nº cualquier fila o columna
6. Se puede desarrollar un determinante por los elementos de una fila o columna .  
Se llama **menor complementario** de un elemento  $a_{ij}$  al valor del determinante de orden n-1 que se obtiene al suprimir en la matriz la fila i y la columna j .  
Se llama **adjunto** del elemento  $a_{ij}$  al menor complementario anteponiendo el signo + o - si i+j es par o impar .  
El valor de un determinante es igual a la suma de productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes :  $/A/ = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$
7. La suma de los elementos de una línea por los adjuntos de los elementos de una línea paralela a ella es 0

8. Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos , dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes .
9. Si los elementos de una línea son combinación lineal de las otras entonces el determinante vale 0
10. Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra paralela multiplicados previamente por un n° real el valor del determinante no varia .
11. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de ellas .

### **Matriz adjunta $A^*$ :**

Es la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos por sus adjuntos correspondientes .

**Cálculo de  $A^{-1}$  a partir de determinantes :**  $A^{-1} = \frac{(A^*)'}{/A/}$

**Matriz ortogonal :** es cuando  $A' = A^{-1}$

### **Rango de una matriz :**

Definición nº1 : Es el número de filas o columnas linealmente independientes ( es posible demostrar que el rango por filas coincide con el rango por columnas ) .

Utilizando esta definición se puede calcular usando el método de Gauss

Definición nº2 : Es el orden del mayor menor no nulo . Utilizando esta definición se puede calcular el rango usando determinantes .

El menor de orden h de una matriz A es el determinante de la submatriz formada por los elementos que pertenecen a h filas y a h columnas .

Ejemplo :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta matriz hay 9 posibles determinantes de orden 3 uno de ellos sería :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

### Introducción :

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas se puede representar así :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de las matrices se puede poner así :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Una solución del sistema es un conjunto de  $n^{\text{os}}$  tales que al sustituirlos por las incógnitas se satisfacen a la vez las m ecuaciones .

Se llama discutir un sistema a saber si tiene soluciones o no , sin resolverlo .

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Compatible (tiene solución)} \\ \text{Incompatible (no tiene solución)} \end{cases} \begin{cases} \text{Determinado (1 solución)} \\ \text{Indeterminado (infinitas soluciones)} \end{cases}$$

Un sistema se puede resolver por el **método de reducción de Gauss** .

**Sistema de Cramer :** (sistema compatible determinado)

Un sistema de ecuaciones se llama sistema de Cramer si  $n^{\text{o}} \text{incógnitas} = n^{\text{o}} \text{ecuaciones}$  y además la matriz de los coeficientes es regular  $|A| \neq 0$

Por ejemplo para un sistema de orden 3 las soluciones serían :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

### Teorema de Rouché Frobenius :

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada sean iguales .

Conclusión :

$$\begin{cases} r(A) \neq r(M) & \text{sistema incompatible} \\ r(A) = r(M) = h & \text{sistema compatible} \begin{cases} h = n & \text{determinado} \\ h < n & \text{indeterminado} \end{cases} \end{cases}$$

### Sistema homogéneo :

Si un sistema de m ecuaciones y n incógnitas tiene todos los términos independientes nulos se dice que es homogéneo . Logicamente siempre será compatible , no solo por el teorema de Rouché si no también por la lógica , ya que la solución  $x_1=x_2=\dots=x_n=0$  siempre valdrá .

La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el  $n^\circ$  de incógnitas , o dicho de otra forma , que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo .