

COMBINATORIA

ÍNDICE :

1. Introducción
2. Número factorial
3. Variaciones
4. Permutaciones
5. Combinaciones
6. Números combinatorios
7. Triángulo de Tartaglia
8. Binomio de Newton

Introducción : La combinatoria estudia las diferentes formas en que se pueden realizar la ordenación o agrupamiento de unos cuantos objetos siguiendo unas determinadas condiciones o reglas . Una forma de hacer estos recuentos es utilizar los **diagramas en árbol** . Estos recuentos están intimamente relacionados con la **probabilidad** .

Número factorial : es el producto de n^{os} consecutivos naturales

$$n! = (n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Todo producto tiene al menos dos factores , luego debemos admitir que $0! = 1$ y que $1! = 1$

Variaciones ordinarias :

Se llama variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que :

- los n elementos que forman el grupo son distintos (no se repiten)
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden) .

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Variaciones con repetición : se llama variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a los distintos grupos formados por n elementos de manera que :

- los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden) .

$$VR_{m,n} = m^n$$

Permutaciones ordinarias : se llama permutaciones de m elementos a las diferentes agrupaciones de esos m elementos de forma que :

- en cada grupo intervienen los m elementos sin repetirse ninguno (intervienen todos los elementos)
- dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos m elementos es distinto (influye el orden) .

$$P_m = m!$$

Permutaciones con repetición : se llama permutaciones con repetición de m elementos donde el primer elemento se repite a veces , el segundo b veces , el tercer c a los distintos grupos que pueden formarse con esos m elementos de forma que :

- intervienen todos los elementos
- dos grupos se diferencian en el orden de colocación de alguno de sus elementos .

$$PR_m^{a,b,c,\dots} = \frac{m!}{a!b!c!\dots}$$

Combinaciones : se llama combinaciones de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que :

- cada agrupación está formada por n elementos distintos entre sí
- dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento , sin tener en cuenta el orden .

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n} = \text{número combinatorio}$$

Combinaciones con repetición : se llama combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n , a los distintos grupos formados por n elementos de manera que :

- los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos
- dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento , sin tener en cuenta el orden .

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} = \binom{m+n-1}{n}$$

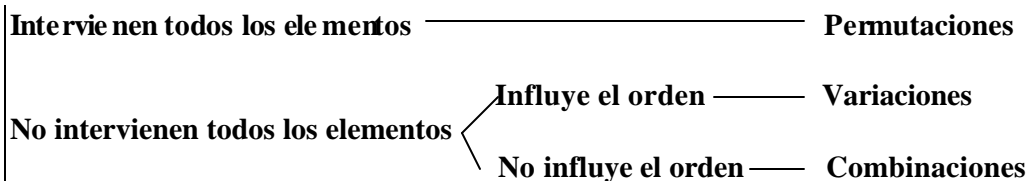
Por ejemplo las combinaciones con repetición de los elementos (a,b,c,d) tomados de dos en dos son :

aa ab ac ad
bb bc bd
cc cd
dd

Otro ejemplo : en una bodega hay 12 botellas de ron , 12 de ginebra y 12 de añís .Un cliente compró 8 botellas en total . ¿Cuántas posibilidades hay ?

$$CR_{8,3} = 120$$

Resumen :



Números combinatorios : se llama número combinatorio de índice m y orden n al número de combinaciones de m elementos tomados de n en n tales que $n \leq m$.

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Propiedades :

- $\binom{m}{0} = \binom{m}{n} = 1$
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
- $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$
- $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$

Triángulo de Tartaglia o Pascal :

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & \\
 & 1 & 2 & 1 & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

Binomio de Newton :

$$(a + b) = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

.....

Si nos fijamos atentamente , los coeficientes coinciden con los del triángulo de Pascal , los exponentes de a van disminuyendo desde n hasta 0 y los de b van aumentando desde 0 hasta n , y en cada término la suma de los exponentes de a y b es igual a n .

Generalizando :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$